|  |
| --- |
| www.pfonda.com |
| Équation de Laplace en coordonnées sphérique |
| Mécanique Quantique |
|  |
| **Hossein Rahimzadeh** |
| **8/19/2008** |

Dans le cas où est indépendant de 

Équation de Laplace :



En coordonnées sphérique :



Dans une symétrie axiale est indépendant dedonc.

Soit une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :



On dérive :



On substitut dans l’équation de Laplace :



On divise par :



On multiplie par  :



On pose :



**Première équation**



On multiplie par  :



Avec un changement de variable on arrive à :







C’est l'équation de Legendre,  obéit à la même équation quealors :

, Pour tout les constantes.

Pour :



**Deuxième équation**



On simplifie :





C’est l'équation d’Euler-Cauchy dont la solution est :



**Solution particulière :**



**Solution générale :**



Dans le cas où est indépendant de 

Équation de Laplace :



En coordonnées sphérique :



Si est indépendant de alors  :



Soit une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :



On dérive :



On substitut dans l’équation de Laplace :



On divise par :



On multiplie par  :



On pose :



**Première équation**



Donc,



C’est l’équation de Helmholtz dont la solution est :



**On trouve :**







Pour 







Donc,



**Deuxième équation**



On divise par  :



On pose :





On multiplie par  :



Avec un changement de variable on arrive à :







C’est l'équation de Legendre associée.

 obéit à la même équation que alors :

, Pour tout les constantes.

**On trouve :**

La solution particulière est :









Alors,



Donc,



**Solution particulière :**



Alors,



On définie les Harmonique sphériques :



Donc,



Alors,



**Solution générale :**



**Orthonormalité**



Ou :



Le cas général

Équation de Laplace :



En coordonnées sphérique :



Soit une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :



On dérive :



On substitut dans l’équation de Laplace :

On divise par :



On multiplie par  :



On pose :



**Première équation**



Donc,



C’est l’équation de Helmholtz dont la solution est :



**Deuxième équation**



On divise par  :



On pose :





On multiplie par  :



Avec un changement de variable on arrive à :







C’est l'équation de Legendre associée.  obéit à la même équation que alors :

, Pour tout les constantes.

Pour les raisons d’orthonormalité on à choisi 



**Troisième équation**



On simplifie :





C’est l'équation d’Euler-Cauchy dont la solution est :



**Solution particulière :**





Alors :



**Solution générale :**



En résumé:

# Dans le cas où est indépendant de (symétrie axiale)



Équation de Legendre : ****

# Solution :

Équation d’Euler-Cauchy : ****

# Solution :

# Solution particulière :



# Solution générale :



# Dans le cas où est indépendant de



Équation de Helmholtz : 

Solution : ****

Équation de Legendre associée : ****

Solution : ****

# Solution particulière :



Ou,



# Solution générale :



# Le cas général



Équation de Helmholtz : ****

Solution : ****

Équation de Legendre associée :****

Solution : ****

Équation d’Euler-Cauchy : ****

Solution : ****

# Solution particulière :



Ou,



# Solution générale :

